EXERCICE N°1 : 25' 4 points

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} x - 1 + e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que $\forall\ x \leq 0$ on a $x^2 . e^x < 1$. En déduire que $\forall\ x \in]-\infty, 1[$ on a $f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f. Construire ζ_f.

EXERCICE N°2 : 25' 5 points

1) Déterminer le signe de $g(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x - 2}$. **a)** Etudier les variations de f.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1/2$ est une asymptote de ζ_f.

c) Quelles sont les positions relative de ζ_f par rapport à Δ. **3)** Tracer ζ_f et Δ.

4) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, \text{Log } 2[$, $f(x) = x + 1/2 + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$. En déduire une primitive de f.

EXERCICE N°3 : 30' 6 points

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

3) Etudier les variations de f est tracer la courbe ζ_f.

4) a) démontrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle E que l'on déterminera.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de E. c) Tracer dans le même repère $\zeta_{f^{-1}}$.

5) Vérifier que $\forall\ x \in D_f \setminus \{0\}$ on a : $f(x) = f'(x) . \left(-1 + \frac{1}{2(1+f(x))} + \frac{1}{2(1-f(x))} \right)$. En déduire une primitive de f sur $D_f \setminus \{0\}$.

6) Soit g la fonction définie par $g(x) = -x + 1/2 \ln(e^{2x} - 1)$. Vérifier que $\forall\ x \in D_f \setminus \{0\}$ on a : $g(x) = \ln(f(x))$. Etudier les variations de g et construire sa courbe.

EXERCICE N°4 : 30' 5 points

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\, e^{\left(\frac{1-x}{2}\right)}$.

Dresser le tableau de variation de f. En déduire que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n! . 2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\left(\frac{1-x}{2}\right)} dx$ et $u_n = 1 + \frac{1}{1! . 2} + \frac{1}{2! . 2^2} + \ldots + \frac{1}{n! . 2^n}$.

a) Montrer que $I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$. **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)! . 2^{n+1}}$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn